

Analysis-CAS : Fichten

1 Fichten - Aufgaben

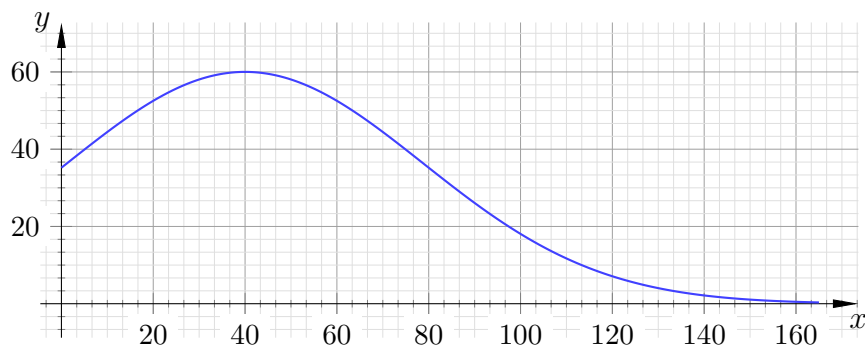
Auf einer Waldfläche wurden neue Fichten gepflanzt. Alle Fichten hatten zum Zeitpunkt der Pflanzung eine Höhe von 50 cm .

1. Höhenwachstum w

Betrachtet wird die Rate des Höhenwachstums der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Wachstumsrate wird durch die Funktion w mit

$$w(t) = 60 \cdot e^{-\frac{1}{3000} \cdot (t-40)^2} \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $w(t)$ die Wachstumsrate in der Einheit Zentimeter pro Jahr ($\frac{\text{cm}}{\text{a}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von w .



- (a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wachstumsrate 40 Jahre nach Pflanzung am größten ist. Berechnen Sie den Zeitraum, in dem die Fichten mehr als $50 \frac{\text{cm}}{\text{a}}$ wachsen. (5 P)
- (b) Ein bestimmter Wert der Wachstumsrate wiederholt sich nach genau 30 Jahren. Berechnen Sie die beiden zugehörigen Zeitpunkte. Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in der obigen Abbildung. (4 P)

(c) Geben Sie die Bedeutung des Terms

$$\frac{1}{100} \cdot \left(50 + \int_0^{60} w(t) dt \right)$$

im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe.
Skizzieren Sie die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit für die ersten 160 Jahre nach der Pflanzung.

(5 P)

Lösung für TI-Nspire CX

Lösung für Classpad

Hinweis:

Mit gleichzeitigem Drücken von `Strg` und `Lösung` bzw. `Ctrl` und `Lösung` wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. Funktion h

In einem anderen Modell wird die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit mit Hilfe der Funktion h mit

$$h(t) = 50 \cdot \frac{e^{\frac{1}{10} \cdot t}}{e^{\frac{1}{10} \cdot t} + 99} \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $h(t)$ die Höhe in der Einheit Meter. Der Graph von h hat genau einen Wendepunkt W .

(a) Bestimmen Sie die Koordinaten von W .

$$[\text{Zur Kontrolle: } W(10 \cdot \ln(99) | 25)]$$

(3 P)

(b) Eine Zeitschrift aus dem Jahr 1911 enthält folgenden Textabschnitt:

Von unseren einheimischen Bäumen steht die Fichte hinsichtlich ihres Höhenwachstums obenan, und zwar mit 37 Zentimeter durchschnittlich im Jahre. Doch sind von Forstbeamten Ausnahmen beobachtet worden, in denen Fichten in einem Jahre bis zu 150 Zentimeter ihrer Länge zusetzen.

(Quelle: Walther Kabel: Wachstumsgeschwindigkeit bei Pflanzen. In: Das Buch für alle. Jahrgang 1911, Heft1, Union Deutsche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 199, S. 23.)

Vergleichen sie die durch die Funktion h bestimmte maximale Wachstumsgeschwindigkeit mit der entsprechenden Angabe im Textabschnitt.

(3 P)

- (c) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt W an.
Die Höhe der Fichten kann im Zeitintervall von 40 bis 50 Jahren nach Pflanzung näherungsweise durch diese Tangente beschrieben werden.
Bestimmen Sie die maximale prozentuale Abweichung im Vergleich zur Beschreibung mit Hilfe von h .

(4 P)

Lösung für TI-Nspire CX

Lösung für Classpad

Um den Verkaufswert eines Baumstammes zu bestimmen, wird dessen Durchmesser in einer Höhe von $1,3\text{ m}$ verwendet. Dieser wird als Brusthöhendurchmesser (BHD) bezeichnet.

3. Brusthöhendurchmesser (BHD)

Für einen BHD ab 15 cm kann der Verkaufspreis von Fichtenstämmen in Abhängigkeit vom BHD näherungsweise mithilfe einer quadratischen Funktion bestimmt werden. Die nebenstehende Tabelle stellt für drei BHD den jeweiligen Preis dar. Ermitteln Sie den Preis für einen Fichtenstamm mit einem BHD von 66 cm .

BHD	Preis
15 cm	6,25 €
40 cm	100 €
60 cm	250 €

(4 P)

Lösung für TI-Nspire CX

Lösung für Classpad

4. Funktion d

Der BHD einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion d mit

$$d(t) = 0,7 \cdot \frac{e^{\frac{t+125}{40}}}{e^{-\frac{t+125}{40}} + 250} \quad \text{und} \quad t \geq 15$$

modelliert. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $d(t)$ der BHD in Metern.

- (a) Begründen Sie, dass der BHD im Modell stets geringer als 70 cm ist.

(2 P)

- (b) Zeichnen Sie für den Zeitraum zwischen 15 und 80 Jahren nach der Pflanzung einen Graphen, der den BHD in Abhängigkeit von der Höhe darstellt.
Verwenden Sie für die Höhe der Fichte das Modell aus der Aufgabe 2.

(4 P)

Lösung für TI-Nspire CX

Lösung für Classpad

5. *Durchmesser des Stammes*

Ein Fichtenstamm hat einen BHD von 40 cm . Sein Volumen vom Boden bis zur Höhe $1,3\text{ m}$ beträgt $0,17\text{ m}^3$. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Durchmesser des Stammes mit zunehmender Höhe linear abnimmt. Berechnen Sie den Durchmesser des Stammes in einer Höhe von 15 m .

(6 P)

Lösung für TI-Nspire CX

Lösung für Classpad